



HAL
open science

À la recherche de raisons d'être pour les structures de groupe: quelques praxéologies pour la profession de professeur

Jean-Pierre Bourgade

► To cite this version:

Jean-Pierre Bourgade. À la recherche de raisons d'être pour les structures de groupe: quelques praxéologies pour la profession de professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2019, 39 (2), pp.131-166. hal-04292138

HAL Id: hal-04292138

<https://univ-tlse2.hal.science/hal-04292138v1>

Submitted on 17 Nov 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

À LA RECHERCHE DE RAISONS D'ÊTRE POUR LES STRUCTURES DE GROUPE : QUELQUES PRAXEOLOGIES POUR LA PROFESSION DE PROFESSEUR

Jean-Pierre Bourgade *

LOOKING FOR RAISONS D'ÊTRE FOR THE ALGEBRAIC
STRUCTURE OF GROUPS: ON SOME PRAXEOLOGIES FOR THE
PROFESSION OF A PROFESSOR

Abstract – The realization of types of tasks such as “finding rationales for the mathematics to be taught” is often difficult, if not impossible for the profession, due to missing adapted and reliable techniques. In this work, we expose the exploration of this type of tasks and give some elements of a possible technique to perform it. This technique is grounded on the study of reports produced in investigation workshops. We chose such resources in order to avoid encounter with artificial, “*didactical*”, *raisons d'être*, as often happens with more usual resources. The technique is based on a twofold exploitation of these reports: a first *primordial* movement, where the mathematical works encountered in the process of investigation are explored; a second *interventionist* movement, when the exploration of reports is directed by a given teaching project. As an illustration, we look for *raisons d'être* for the study of algebraic structures in post-secondary teaching.

Key words: anthropological theory of the didactical, praxeologies for the profession, post-secondary education, abstract algebra

BUSCAR RAZONES DE SER DE LA ESTRUCTURA ALGEBRAICA
DE GRUPO: ALGUNAS PRAXEOLOGÍAS PARA LA PROFESIÓN
DE PROFESOR

Resumen – La realización del tipo de tareas “Encontrar razones de ser de las matemáticas por enseñar” a veces es difícil, o incluso imposible para la profesión, por falta de técnicas adecuadas y fiables. En este trabajo, se presenta una exploración de este tipo de tareas y algunos elementos de una técnica posible para realizarlo, basándose en el estudio de informes

* ESPE de Toulouse, Université Toulouse 2 Jean-Jaurès, jean-pierre.bourgade@univ-tlse2.fr

realizados en talleres de investigación. Elegimos este tipo de recursos para evitar el encuentro con razones de ser artificiales, “didácticas”, como ocurre con recursos más habituales. La técnica propuesta se fundamenta en una explotación de dichos recursos en dos tiempos: un movimiento *primordial*, donde se buscan las obras matemáticas encontradas en el curso de las investigaciones, y un movimiento *intervencionista*, donde la investigación es finalizada por un proyecto de enseñanza. En forma de ejemplo, buscamos unas razones de ser para el estudio de estructuras algebraicas en la enseñanza superior.

Palabras-claves: teoría antropológica enseñanza, praxeologías para la profesión, educación post-secundaria, álgebra general

RESUME

La réalisation de types de tâches tels que « chercher les raisons d’être d’un savoir à enseigner » est souvent difficile, parfois impossible pour la profession, faute de techniques adéquates et fiables. Dans ce travail, nous présentons une exploration de ce type de tâches et nous présentons quelques éléments d’une technique possible pour le réaliser. Cette technique repose sur l’étude de rapports réalisés dans le cadre d’ateliers d’enquête. Nous utilisons de telles ressources afin de limiter le risque de trouver des raisons d’être artificielles, “*didactiques*”, comme c’est souvent le cas avec des ressources plus habituelles. La technique se fonde sur une exploitation double de ces rapports : un premier mouvement *primordial*, où les œuvres mathématiques rencontrées au cours des enquêtes sont étudiées en détail ; un deuxième mouvement, *interventionniste*, où l’exploration des rapports est dirigée par un objectif d’enseignement. En guise d’illustration, nous présentons la recherche de raisons d’être pour l’étude des structures algébriques dans l’enseignement supérieur.

Mots-Clés : théorie anthropologique du didactique, praxéologies pour la profession, enseignement supérieur, algèbre générale

INTRODUCTION

Un des postulats centraux de la théorie des situations didactiques (TSD), fondé sur la notion bachelardienne d’obstacle épistémologique, suppose qu’on peut associer à chaque savoir ou savoir-faire mathématique une situation fondamentale où il apparaît comme un moyen de surmonter des difficultés (obstacles) et par où se voit sa signification essentielle (Brousseau, 1997). La théorie anthropologique du didactique (TAD, voir par exemple

Chevallard, 2007), en prolongeant la TSD dans des directions qui lui sont propres, propose un cadre d'étude légèrement distinct. Sans nier l'intérêt du postulat de Brousseau, on peut néanmoins s'accorder sur la difficulté pratique que présente la recherche effective de telles situations fondamentales. C'est notamment le cas pour ce qui concerne les savoirs dits « FUGS » (formalisateur, unificateur, généralisateur, simplificateur, voir Robert, 1998), comme l'algèbre générale, dont l'émergence historique a été marquée par un processus d'abstraction progressive qui rend difficile l'usage d'une approche historique, par exemple, pour en élaborer des situations fondamentales. On est souvent conduit à produire des « ingénieries longues » (Dorier, 1997 ; Robert, 1992) dont la gestion et la conception sont délicates (voir, par exemple, sur la question des prérequis, Durand-Guerrier, Hausberger et Spitalas, 2015). La TAD propose une approche *a priori* légèrement moins exigeante de la conception des séquences d'enseignement, tout en préservant l'essentiel de l'apport de la TSD. Chevallard (2009) propose ainsi que la découverte d'une nouvelle « notion » mathématique débute par l'étude d'une *situation du monde* (qui peut être une situation du monde *mathématique* comme du monde *extramathématique*, ou encore une situation *mixte*) où se pose une question, et où la construction d'une réponse à cette question nécessite la réalisation d'une tâche ✓ (« tâche coche ») ; la réalisation de cette tâche entraîne à son tour la réalisation d'une tâche problématique (pour l'élève) notée t^* . Pour surmonter la difficulté rencontrée dans la réalisation de t^* , l'élève doit réaliser une tâche t d'un type T qui est au cœur du savoir à enseigner. Partant d'un savoir à enseigner qui serait, par exemple, la division euclidienne, on peut imaginer que la tâche ✓ serait : « aider un paysan à déterminer le nombre de boîtes de six œufs nécessaires pour expédier 250 œufs ». La tâche t^* serait alors du type T^* suivant : « déterminer le nombre N de boîtes qui peuvent contenir n objets d'un certain type, afin d'emballer m objets de ce type ». Pour réaliser une tâche de ce type, il est utile, voire indispensable, de réaliser une tâche t du type T : « effectuer la division euclidienne d'un nombre entier m par un autre nombre n ». Ce type de situation du monde permet de fournir des raisons d'être fortes aux organisations mathématiques qui sont nécessaires pour en mener l'étude : dans l'exemple précédent, la tâche ✓ donne une raison d'être à l'étude des tâches de *partage* qui, à leur tour, fournissent une raison d'être à la division euclidienne des nombres entiers. Une situation du monde, dans ce sens, n'est pas nécessairement une situation fondamentale au sens épistémologique de Brousseau ;

néanmoins elle permet d'accomplir un certain nombre des fonctions principales des situations fondamentales – en particulier, les situations du monde favorisent la construction du savoir à travers la réalisation de situations d'action, de formulation de validation, etc. Plus précisément, Chevallard (2009) propose de nommer *activité d'étude et de recherche* (AER) les situations didactiques consacrées à l'étude d'une situation du monde, dans la mesure où elles permettent la rencontre avec un type de tâches T , la construction d'une technique pour réaliser les tâches de ce type, et l'élaboration au moins partielle d'une justification de cette technique. Même si la conception d'AER pose moins de problèmes que la recherche d'une situation fondamentale, la profession de professeur manque d'infrastructures suffisantes pour faciliter la conception et la mise en œuvre d'AER par les professeurs eux-mêmes (voir Chevallard, 2009 et Artaud, 2011 par exemple). Ce type d'ingénierie reste néanmoins plus facile à construire et implémenter que ne le sont, par exemple, les parcours d'étude et de recherche (PER, voir Chevallard, 2011 ; Barquero, Bosch et Gascón, 2011).

Dans cet article, nous n'étudierons pas les problèmes liés à la gestion des AER en classe, qui constituent un objet de recherche par ailleurs très vif (voir par exemple Bosch, 2011). Nous consacrons ce travail à l'étude des deux questions suivantes :

$Q_{R.}$: Comment trouver des raisons d'être *non didactiques* (en un sens que nous préciserons plus loin) à un thème (par exemple celui des lois de composition internes) ?

Q_{AER} : Comment construire une situation du monde dont l'étude permettrait de conduire à l'émergence d'un thème donné tout en donnant à voir certaines de ses raisons d'être non didactiques ?

Nous proposons quelques éléments de réponses en nous appuyant sur l'exemple du thème des lois de composition interne, étudié au premier cycle universitaire (étudiants de 18 ans). Notons que la question Q_{AER} porte essentiellement sur la production d'une situation du monde, et non sur le problème (complexe lui aussi) de la mise en œuvre effective d'une AER.

Au niveau universitaire, l'introduction des structures algébriques pose d'importants problèmes aux étudiants. Lajoie (2000, voir aussi Lajoie et Mura, 2004) met ainsi en évidence que certains facteurs didactiques (l'étude préalable de groupes de nombres) produisent certaines difficultés (oubli de l'axiome d'associativité, difficulté à comprendre que le neutre puisse être autre que 0 ou 1, etc.). D'autres auteurs (Dubinsky, Dautermann, Leron et Zazkis, 1994 ; Brown, DeVries, Dubinsky et Thomas,

1997) ont produit des analyses dans le cadre de la théorie APOS et parviennent à interpréter certaines difficultés rencontrées par les étudiants en les associant à différents niveaux de la décomposition génétique des notions de lois binaires. L'accent est mis sur des aspects qui sont pour partie mathématiques et pour partie l'expression des conditions d'étude de ces mathématiques.

Notre perspective est différente en ce qu'elle se fonde sur la distinction entre les mathématiques enjeu de l'étude (l'organisation mathématique) et les moyens de leur étude (l'organisation didactique). On dispose alors d'un moyen de décrire les mathématiques à étudier indépendamment des processus d'étude (et d'apprentissage), ce qui ouvre la possibilité d'une étude de la problématique du savoir lui-même, indépendamment des difficultés engendrées par son étude. De ce point de vue, beaucoup de difficultés ont été reliées au fait que l'algèbre abstraite est un savoir de type « FUGS » (Robert, 1998 ; on pourra également se reporter aux travaux de Hausberger (2012, 2016) pour une autre proposition d'étude des *praxéologies structuralistes*). On a également pu mettre en avant le fait que les raisons d'être de l'algèbre abstraite n'apparaissent que plus tard dans le cursus (Robert, 1992).

Un type de tâches fréquemment étudié en première année d'études supérieures scientifiques en France consiste à vérifier qu'une loi dote un ensemble donné d'une structure de groupe, sans que la fonction de cette structure n'apparaisse de manière claire à ce niveau d'enseignement : on vérifie qu'un ensemble muni d'une loi est un groupe, sans vraiment interroger l'utilité d'un tel fait. La plupart des exercices proposés à ce niveau d'étude ne mettent pas en jeu des situations où se pose de manière sérieuse et non triviale la question de savoir si une loi satisfait ou non les axiomes des lois de groupe, en particulier, le fait qu'une loi soit bien définie, interne et associative ne fait généralement pas de doute. Les lois de composition interne (lci) sont introduites de façon axiomatique et ni les groupes, ni les lci ne sont découverts de façon fonctionnelle, comme des outils nécessaires pour répondre à des questions précises. Même si l'on étudie parfois des « applications » de la théorie des groupes, les lci apparaissent seulement comme un élément de la construction des groupes, élément qu'il n'est pas nécessaire d'étudier pour lui-même. L'idée que seules les lois *internes* (c'est-à-dire pour lesquelles les ensembles de départ et d'arrivée sont les mêmes) et *associatives* sont intéressantes paraît très répandue, comme on le voit dans l'extrait suivant d'un cours en ligne (Ferrard, 2015, p. 282, je souligne) : « Cette loi, définie

par $(x, y) \mapsto x - y$, n'est ni associative ni commutative (*donc sans intérêt !*) ». Il semble ainsi nécessaire de disposer d'une loi interne associative (voire commutative) pour pouvoir engager un travail qui ait quelque valeur. Cette vision, quoiqu'elle donne en apparence beaucoup d'importance aux notions d'associativité et d'opération interne, interdit la mise en évidence de leurs raisons d'être. En effet, proposer seulement des situations où les lois sont associatives et internes ne permet paradoxalement pas de mettre en évidence les raisons pour lesquelles il est intéressant de disposer de lois qui ont ces propriétés. Enfin, cette situation est souvent compliquée par le fait que les premiers exemples de groupes étudiés sont des groupes de nombres dont la familiarité interdit la manifestation de l'intérêt des axiomes de la structure de groupe (Lajoie, 2000, p. 114 sq.).

Après avoir rappelé quelques éléments de TAD et précisé la signification que nous donnons à l'expression « raison d'être non didactique », nous présentons un dispositif didactique, les ateliers d'enquête, où les élèves étudient une question sans préjuger des savoirs (mathématiques ou autres) qui leur seront nécessaires pour construire une réponse. Les enquêtes menées dans ce cadre, parce qu'elles sont menées sans intention didactique *a priori* relative aux thèmes qu'elles conduisent à étudier, permettent précisément de mettre au jour des raisons d'être *non didactiques* de ces thèmes. Afin de faire émerger une technique de recherche de raisons d'être non didactiques pour un savoir donné (ici, l'étude des lois de composition interne), nous exploitons des journaux d'enquête produits par des étudiants dans le cadre d'un tel atelier d'enquête.

Ceci nous permet de proposer un scénario d'AER sur les structures de groupe dont nous menons une analyse *a priori* et sur la base de laquelle nous essayons d'explicitier les éléments de réponse que nous pensons avoir produits pour les questions $Q_{R.é}$ et Q_{AER} .

ÉLÉMENTS DE THÉORIE ANTHROPOLOGIQUE DU DIDACTIQUE

L'École est soumise à plusieurs paradigmes didactiques, dont l'un est plus particulièrement prégnant à l'heure actuelle. Dans le cadre de ce paradigme, dit de la visite des œuvres, les programmes d'étude sont généralement formulés autour d'œuvres qu'il convient d'étudier sans que des raisons d'être de ces œuvres ne soient toujours données dans les programmes.

Le paradigme du questionnement du monde (Chevallard, 2013), qui peine à exister pleinement dans l'institution scolaire française actuelle dans la mesure où celle-ci impose des contraintes telles que la nécessité de visiter les œuvres inscrites au programme des différentes classes, pourrait par exemple aboutir à la constitution de programmes d'étude articulés autour de questions plutôt que d'œuvres, celles-ci apparaissant alors comme des moyens de construire des réponses à ces questions.

Un compromis avec l'écologie du système scolaire français consiste à organiser l'étude de ces œuvres de façon à ce qu'elle débute par l'étude de questions : de là la notion d'activité d'étude et de recherche (AER). Pour mieux comprendre les outils de conception d'AER, il est peut-être nécessaire de clarifier la notion d'*œuvre mathématique*, ou encore de préciser comment la TAD propose de modéliser l'activité mathématique.

En TAD, on postule que toute action humaine peut se modéliser comme la réalisation d'une tâche d'un certain type T (« se laver les mains ») au moyen d'une technique τ (« se mouiller les mains, prendre un peu de savon, se frotter les mains énergiquement, y compris entre les doigts et sous les ongles, puis rincer à l'eau claire ») ; le fait qu'une technique fonctionne et permette bien de réaliser les tâches du type considéré n'est pas évident en soi et requiert une explication ou une justification à travers un discours (*logos*) sur cette technique (*technè*) : une technologie θ (« il est nécessaire d'utiliser du savon puisque certaines saletés ne partent pas à l'eau claire, par exemple la graisse, etc. ») qu'on pourrait justifier à son tour au moyen d'une théorie Θ (« on considère que la graisse est sale, et que se nettoyer les mains passe par l'élimination de la graisse, etc. »). La *praxis* [T/τ] et le *logos* [θ/Θ] forment une praxéologie [$T/\tau/\theta/\Theta$], ou organisation praxéologique (dans ce travail, nous parlerons de praxéologie mathématique, ou d'organisation mathématique pour désigner une praxéologie relative à un type de tâches *mathématique*).

Si la notion de praxéologie permet de modéliser le contenu (les mathématiques) à enseigner, on peut décrire l'organisation de l'étude de ce contenu à l'aide d'un autre outil élaboré dans le cadre de la TAD : le modèle des moments de l'étude. On considère en TAD que l'étude d'une praxéologie mathématique, pour être complète, doit passer par la réalisation de certains moments : il sera nécessaire de rencontrer et d'identifier les types de tâches problématiques (*moment de première rencontre*) ; l'étude de ces types de tâches passe par leur exploration et par l'émergence d'une technique pour les réaliser (*moment exploratoire et d'émergence*

de la technique) ; l'utilisation de la technique et son élaboration conduisent à la production d'une série de justifications (*moment de la construction du bloc technologico-théorique*) ; pour s'assurer d'une bonne maîtrise de la technique, il est indispensable de la travailler (*moment du travail de l'organisation praxéologique*) ; l'institutionnalisation, c'est-à-dire l'officialisation et la formalisation de la praxéologie étudiée, est un moyen de s'assurer que cette organisation de savoir est bien partagée par tous les membres de l'institution qui l'étudie, mais aussi d'explicitier le rapport institutionnellement attendu à cette praxéologie (*moment de l'institutionnalisation*) ; par ailleurs, il est nécessaire d'évaluer la pertinence et la robustesse de la praxéologie étudiée (déterminer si le type de tâches est pertinent, si la technique adaptée, si la technologie permet bien de justifier la technique, etc.) et aussi de déterminer si le rapport à cette praxéologie tel que l'ont développé les personnes qui l'ont étudiée est bien conforme au rapport institutionnellement attendu (*moment de l'évaluation*).

On peut caractériser les AER par le fait qu'elles doivent permettre la réalisation des moments de première rencontre, de l'émergence de la technique et de la construction du bloc technologico-théorique lors de l'étude d'une organisation praxéologique donnée. La réalisation de quelques AER ne saurait donc épuiser l'étude d'une praxéologie donnée : pour être complète, une séquence d'étude portant sur un thème donné devra par exemple comporter une AER, mais également des séances d'exercices (moment de travail), de synthèse (moment d'institutionnalisation) et une évaluation (moment de l'évaluation).

Les ateliers d'enquête (Chevallard, 2011) ont été conçus et expérimentés pour la première fois dans un collège de l'enseignement secondaire à Marseille (collège du Vieux-Port, élèves de 13-14 ans). On pose aux élèves une question (question génératrice) pour laquelle l'enseignant lui-même n'a pas d'idée précise des réponses qu'on pourrait lui donner, ni même des praxéologies dont l'utilisation serait utile pour l'élaboration d'une telle réponse. D'une part, les ateliers d'enquêtes ouvrent la possibilité d'étudier les conditions et les contraintes qu'imposent les institutions comme les collèges, et d'évaluer dans quelle mesure elles favorisent ou empêchent la réalisation d'enquêtes par les élèves et le développement d'une pédagogie de l'enquête de la part de l'enseignant ; d'autre part, les ateliers permettent également d'assister à l'émergence de praxéologies qui apparaissent au cours de l'enquête, poussées en avant par la nécessité de répondre à la question génératrice. Ils permettent même parfois d'observer

l'apparition fonctionnelle de praxéologies qu'il est nécessaire de « visiter » dans le cadre du programme des classes du collège.

Les PER généralisent la notion d'AER en conservant l'idée d'un processus d'étude initié par l'étude d'une question. Si l'étude du savoir à enseigner et sa modélisation comme organisation de savoir (ou par l'intermédiaire de modèles praxéologiques de référence, voir Barquero, Bosch et Gascón, 2011 ; Gascón, 2011) a fait l'objet de nombreux travaux (Fonseca, Gascón et Oliveira, 2014 ; Cid et Bolea, 2007 ; Ruiz, Bosch et Gascón, 2010 ; etc.), le processus de construction d'une question génératrice reste relativement peu étudié (voir tout de même Bourgade, 2016 ; Bourgade, Bernad et Matheron, à paraître).

SITUATIONS FONDAMENTALES, QUESTIONS GENERATRICES, RAISONS D'ETRE

Une question Q est une *raison d'être*¹ d'une praxéologie \wp dans une institution I si, sous les conditions C et les contraintes K qui règnent dans l'institution I , il existe une instance U et une instance V qui estime que, pour que U étudie Q dans I , il est utile, voire indispensable que \wp soit disponible². Par exemple, si l'institution I est une classe de première scientifique, il se peut qu'existent une instance U (les élèves de cette classe) et une instance V (leur professeur de mathématiques) qui estime que, pour que les élèves étudient la question « Comment déterminer la vitesse d'une réaction chimique à un instant donné connaissant l'évolution de la concentration de l'un des réactifs en fonction du temps ? », il est utile, voire indispensable qu'une praxéologie élaborée autour du type de tâches « Déterminer l'équation de la tangente à une courbe en un point donné » soit disponible. Remarquons qu'un autre professeur de mathématiques dans une autre classe de première S pourrait considérer que c'est une autre praxéologie (par exemple celle qui serait construite autour du type de tâches « Déterminer la fonction dérivée d'une fonction donnée ») qui est utile voire indispensable, tandis qu'un troisième considérerait que cette

¹ Par la suite, nous composerons toujours l'expression « raison d'être » en italiques pour rappeler la définition précise que nous adoptons ici.

² En TAD, on dit qu'une praxéologie \wp est disponible dans une institution I s'il existe des positions dans cette institution telles que les personnes qui les occupent maîtrisent \wp . Ici, V considère qu'il est utile ou indispensable que U maîtrise \wp pour étudier Q .

question n'est pas une *raison d'être* du calcul différentiel dans sa classe de première S , sous les conditions et les contraintes qui y règnent : l'un des professeurs a pu choisir de faire de l'étude des courbes de concentration un fil rouge autour duquel il organise la rencontre avec un certain nombre de praxéologies à enseigner ; un tel choix modifie l'écologie de sa classe et certains choix y sont possibles qui ne sont pas possibles sous d'autres conditions. On voit par là que les *raisons d'être*, ainsi définies, sont *relatives à une institution donnée* (et même à un certain jeu de conditions et de contraintes qui y règnent) : il n'y a pas de *raison d'être* absolue pour une praxéologie, seulement des *raisons d'être* susceptibles de se rencontrer en telle ou telle institution.

Par ailleurs, nous dirons qu'une question Q est une *raison d'être non didactique* d'une praxéologie si c'est une *raison d'être* au sens vu précédemment, et *s'il n'y a pas de raison de penser que* l'instance V – qui considère que la disponibilité de \wp est utile ou indispensable à l'étude de Q par l'instance U – *avait l'intention de faire étudier \wp par U .*

À l'inverse, [...] nous parlerons de *raisons d'être didactiques* lorsqu'il y a des *raisons de penser que* l'instance V est animée par l'intention de faire étudier \wp par U : en ce cas, rien ne garantit que les raisons pour lesquelles V considère que \wp est indispensable à l'étude de Q soient indépendantes de son intention de faire étudier \wp par U . Le contraire n'est pas nécessairement vrai non plus : il se peut qu'une raison d'être didactique puisse être, par ailleurs, non didactique, même si rien ne le garantit en général.

Comme nous décidons de définir les *raisons d'être* comme des *questions*, il convient de situer la question de la recherche de *raisons d'être* par rapport à la question, proche mais non identique, de la conception d'une question génératrice.

Une *question génératrice* est une question qui engendre un processus d'étude substantiel : elle produit, elle engendre de l'étude. Ce n'est pas le cas de toutes les questions (« Quelle heure est-il ? » produit de l'étude, mais généralement une étude limitée à la consultation d'une montre ou d'une horloge). Si l'étude d'une question génératrice n'est possible qu'à condition qu'une certaine praxéologie \wp soit disponible, elle constitue alors une *raison d'être* de cette praxéologie. Pour autant, les questions génératrices, du fait même de leur fort pouvoir générateur d'étude, sont généralement des *raisons d'être* très indirectes d'une praxéologie : en général, et c'est même à cela qu'on peut mesurer leur pouvoir générateur d'étude, elles engendrent des *questions dérivées* dont certaines, mais pas nécessairement toutes, peuvent constituer des

raisons d'être de \wp . Le caractère non déterminé *a priori* du parcours d'étude et de recherche engendré par une question génératrice (parcours que l'on peut modéliser par un *réseau* de questions dérivées possibles) ne garantit pas que l'on y passera par les questions dérivées qui constituent une *raison d'être* de \wp , ce qui explique que la question génératrice elle-même puisse ne pas être une *raison d'être* de \wp bien que l'une des questions dérivées de la question génératrice puisse en être une. Ainsi, l'étude de la question suivante : « Comment construire un triangle ABC dont les milieux I, J et K des côtés soient donnés *a priori* ? » peut conduire à l'étude du théorème des milieux – et donc fournir une *raison d'être* à ce théorème – mais elle peut aussi conduire à l'étude des parallélogrammes (il suffit de construire les trois parallélogrammes dont trois sommets sont les points I, J et K : les trois sommets manquants sont les points A, B et C). En revanche, si la question dérivée « Peut-on construire en premier les *côtés* du triangle ABC cherché plutôt que ses sommets ? » vient à être posée, il y a fort à parier que l'étude conduira à remarquer que les côtés du triangle ABC sont portés par les parallèles aux trois droites passant par les trois points I, J et K : cette question dérivée fournit une *raison d'être* au théorème des milieux vu comme ingrédient technologico-théorique d'une praxéologie construite autour du type de tâches « Déterminer si deux droites sont parallèles ».

Dans le cadre de la conception d'une AER, on cherche donc à construire une situation du monde où se pose une question Q qui ait un pouvoir générateur d'étude (une question génératrice, donc) et qui soit également une *raison d'être* d'une praxéologie choisie à l'avance – ou dont puisse dériver une question qui soit une telle *raison d'être*, par exemple sous la forme d'une question cruciale que le professeur soit amené à poser si elle ne se pose pas d'elle-même à la classe (on voit là une différence essentielle dans la gestion de l'étude entre une AER – qui est un « petit » PER finalisé – et un PER non finalisé comme ceux qui se déroulent dans un atelier d'enquête).

Remarquons enfin que les notions de question génératrice, de *raison d'être* et de situation fondamentale, pour être reliées n'en sont pas pour autant confondues. En particulier, une *raison d'être* n'a aucune raison de suffire à construire une situation fondamentale capable d'engendrer « l'ensemble des situations correspondant à un savoir déterminé » (Brousseau, 1997).

COMMENT CHERCHER DES RAISONS D'ÊTRE ?

Une difficulté du métier de professeur est en lien avec la réalisation du type de tâches professionnel suivant :

TR.ê : « Trouver des raisons d'être non didactiques de praxéologies à enseigner »

Avant de présenter une exploration de ce type de tâches, rappelons deux des problématiques de la didactique que Chevallard (2011) a proposées : la *problématique primordiale* consiste en la recherche des praxéologies utiles, voire indispensables, pour une instance donnée qui souhaite réaliser un projet donné. On obtient une problématique duale de celle-ci en fixant la praxéologie et en s'autorisant une variabilité pour le projet considéré : dans le cadre de la *problématique interventionniste*, on cherche les projets dont la réalisation par une instance donnée nécessite l'utilisation d'une praxéologie donnée.

Le travail du professeur qui souhaite élaborer une AER et qui cherche une situation du monde où se pose une question qui est une *raison d'être* d'une praxéologie donnée relève de la problématique interventionniste. À l'inverse, le cas d'étudiants qui cherchent des outils (des praxéologies) pour élaborer une réponse à une question génératrice dans un atelier d'enquête illustre la problématique primordiale.

Nous proposons ici un exemple d'exploration d'un type de tâches professionnel du métier de professeur qui est une version un peu plus précise de $T_{R.ê}$:

$T'_{R.ê}$: « Trouver des situations du monde où se pose une question qui soit une *raison d'être non didactique* d'une praxéologie donnée. »

Un professeur (que nous désignerons par la lettre y) doit enseigner un contenu mathématique modélisé par une praxéologie (par exemple : l'algèbre abstraite) que nous noterons \wp_0 (l'indice « 0 » signifiera, dans toute la suite du texte, que l'on fixe l'objet indicé : ici, la praxéologie est fixée *a priori*, on ne dispose pas de latitude sur ce point). Pour cela, il souhaite proposer à ses élèves de répondre à une question qui se présente dans une certaine situation du monde Σ et qui constitue une *raison d'être* de \wp_0 . Le fait pour y de chercher une telle situation Σ relève de la problématique interventionniste. Le travail de y consiste alors en une enquête initiée par une question du type

Q_{SM} : « Quelles sont les situations du monde où il est utile voire

indispensable d'utiliser \wp_0 ? »

De là une question dérivée qui se pose à nous :

« Quelles sont les ressources sur lesquelles y pourrait se fonder pour enquêter sur Q_{SM} ? »

Le refoulement du didactique (Chevallard, 1997) pose de nombreux problèmes ; dans nos sociétés, les aspects didactiques de la vie, c'est-à-dire les situations d'étude, sont refoulés, et il est difficile de trouver des rapports d'enquête qui ne soient pas finalisés par les réponses aux questions : la connaissance de la réponse élaborée finalise le rapport d'enquête, refoulant les aspects supposément dépourvus d'intérêt. Paradoxalement, un rapport d'enquête est le reflet d'intentions didactiques (relatives à la diffusion des conclusions de l'enquête, par exemple) qui rendent parfois difficile la présentation des aspects didactiques du travail d'étude et de recherche qui le fonde.

Par conséquent, si l'on souhaite construire des situations adidactiques, et où la nécessité d'utiliser \wp_0 soit incontestable, étudier des ressources classiques (comme des manuels, les programmes officiels ou les documents d'accompagnement disponibles sur Eduscol) risque de conduire à la rencontre de *raisons d'être didactiques* de \wp_0 , qui manifestent plus les intentions didactiques des auteurs que la fonctionnalité propre de \wp_0 . Au contraire, l'exploration de corpus produits dans des ateliers d'enquête garantit dans une certaine mesure que les situations rencontrées mettent en avant les *raisons d'être non didactiques*, pour autant que la question génératrice de l'enquête étudiée n'a pas été choisie avec une intention didactique relative à \wp_0 .

Mais, précisément, cette dernière contrainte rend impossible de prévoir quelles seront les praxéologies utiles ou indispensables à l'étude d'une telle question génératrice. On voit alors se dessiner les contours d'une technique $\tau'_{R.é}$ possible pour réaliser le type de tâches $T'_{R.é}$:

$\tau'_{R.é}$: Il faut procéder selon un mouvement dialectique : une lecture *primordiale* du corpus permet d'identifier quelques praxéologies \wp_k qui apparaissent dans le programme de l'une ou l'autre des classes avec lesquelles travaille y , et qui sont utiles ou indispensables pour répondre à l'une des questions qui apparaissent dans le corpus (comme questions dérivées de la question génératrice de l'enquête). Dans un deuxième temps, une lecture *interventionniste* du même corpus permet de déterminer

toutes les situations Σ_i où se posent des questions $Q_{i,j}$ pour l'étude desquelles la disponibilité de \wp_k est utile, voire indispensable. À l'issue de ce processus, qui peut nécessiter plusieurs aller-retour entre les deux types de lectures, il est nécessaire de s'extraire du contexte du corpus (et de l'enquête qui l'a engendré) pour élaborer une situation indépendante, Σ , inspirée des situations Σ_i , et qui permette l'étude fonctionnelle de l'une des praxéologies \wp_k , c'est-à-dire une étude engendrée par une question Q qui se pose dans la situation Σ .

UN EXEMPLE D'ENQUETE

La prépa des INP est une institution scolaire (étudiants de 18-19 ans) qui conduit aux écoles d'ingénieurs en France et où le paradigme de la visite des œuvres est dominant ; la création d'un atelier d'enquête dans ce contexte fut imaginée comme un moyen d'introduire dans une institution « monumentaliste » un dispositif qui permette l'étude fonctionnelle de praxéologies scientifiques. Le professeur pose une question génératrice au début de l'année, et les étudiants, par équipes de cinq, doivent élaborer une réponse dans un délai de 8 mois. Ils disposent d'une autonomie importante et peuvent enrichir le milieu de l'étude avec un grand nombre de ressources : livres, internet, appels téléphoniques, entretiens avec des ingénieurs ou des scientifiques, etc. Au fur et à mesure de l'avancée de l'enquête, chaque équipe note dans un carnet de bord les événements significatifs qui l'ont scandée (ressources découvertes, questions dérivées, éléments de réponse, etc.). Chaque équipe rédige ensuite un rapport d'enquête final où elle présente sa réponse à la question génératrice.

Le choix de la question génératrice dans l'atelier d'enquête fut réalisé selon les critères suivants : la question ne devait pas être choisie en fonction de praxéologies mathématiques que l'on souhaitait faire émerger ; elle devait être vive, c'est-à-dire pouvoir susciter l'intérêt d'étudiants en école d'ingénieurs ; elle devait avoir un pouvoir générateur fort. Les liens entre la construction d'une question génératrice et la gestion de l'étude dans l'atelier d'enquête qui l'étudie sont explorés dans un travail à paraître (Bourgade, Bernad et Matheron, à paraître ; voir aussi Bourgade, 2016).

En 2013-14, les étudiants ont étudié la question suivante (élaborée par l'auteur¹ et une didacticienne, à partir de la suggestion d'un enseignant du second degré, sans qu'il ne soit

apparu alors que son étude conduirait à l'étude des lois de composition internes – l'étude des matrices avait été imaginée, mais sans plus de détails que l'idée qu'une image devait être représentée par une matrice) :

Q_{netteté} : « Certains logiciels de retouche d'images permettent d'améliorer la netteté des photos. Comment est-ce possible ? »

L'atelier était encadré par un seul intervenant, l'auteur de cet article, dont le rôle s'est largement limité aux aspects matériels – fournir des rallonges électriques, des ordinateurs, etc. – et didactiques relatifs aux techniques d'enquête – aide à l'étude de quelques outils comme les traducteurs en ligne, les moteurs de recherche de publications scientifiques, etc. Le soutien d'une didacticienne a été ponctuel et relatif à des difficultés de gestion de l'étude (au niveau pédagogique), notamment pour la relance de l'étude lorsque des équipes pensaient avoir terminé (très tôt) ou ne voulaient plus chercher (la relance a généralement consisté à soulever des points aveugles dans leurs réponses provisoires, points qui posaient de nouvelles questions). Par ailleurs, en dépit de la durée importante de l'atelier, il n'y a pas eu de structuration des séances de la part de l'enseignant et de la didacticienne (certaines équipes ont pris en charge de façon autonome la structuration de certaines séances, un groupe de 24 étudiants allant même jusqu'à organiser une séance de présentations – à mi parcours – pour que tous les étudiants soient en possession des mêmes informations). Un des objectifs de la mise en place de l'atelier était, du point de vue de la recherche, de constituer un milieu pour l'étude des praxéologies didactiques des étudiants, ce qui explique le peu d'interventions de l'enseignant dans la « direction » de l'étude.

Enfin, les étudiants avaient toute liberté de s'adresser à des personnes tierces, dans l'institution ou à l'extérieur (certains ont rencontré des chercheurs au CNRS, des ingénieurs, des vendeurs d'appareils photographiques, etc.).

Dans son principe même, l'atelier d'enquête conduisait à des parcours d'étude et de recherche proches (car engendrés par la même question génératrice) mais distincts (fortement par moments). Nous concentrons notre étude sur le travail produit par certaines équipes, pour lesquelles l'enquête a débuté par une étude de la notion de flou :

Nous avons commencé par regarder les définitions des mots de la question, en particulier celle de la netteté, ce qui nous a conduits à

la définition du flou (R-E6³)

Pour commencer, on a défini le sens de “netteté” et on a ramené ce mot au flou. C’est-à-dire que pour améliorer la netteté d’une photographie [...] il était nécessaire de définir ce qu’est le flou en général, et son origine (R-E7)

Cette dernière citation donne une indication sur l’un des parcours suivis par diverses équipes.

[...] rapidement, nous avons établi un lien entre la notion de netteté et celle de flou. On peut se demander si supprimer le flou permet d’améliorer la netteté d’une image (R-E9)

Ainsi apparaît l’idée que pour produire de la netteté, il faut réduire le flou, ou encore que si l’on savait comment produire du flou, il suffirait de le faire à l’envers (en un sens qui reste à éclaircir) pour produire de la netteté :

En fait, la netteté c’est comme le flou, mais à l’envers ; ah ouais ??? (CB-E8)

On voit alors dériver de $Q_{\text{netteté}}$ les deux questions suivantes :

Q_{flou} : « Comment peut-on flouter une image avec un logiciel ? »

$Q_{\text{à l’envers}}$: « Comment peut-on faire du flou à l’envers ? »

La compréhension de l’étude de ces questions nécessite un bref détour pour présenter quelques aspects du traitement des images par un logiciel :

À mesure que nous avançons dans la recherche [...] nous nous sommes rendu compte que tous les algorithmes prenaient en compte la matrice de la photo. Alors, nous avons cherché une définition matricielle de la photo (CB-E8)

Ainsi, progressivement, les équipes ont découvert que les images sont modélisées par des matrices rectangulaires dont les entrées représentent des points (éléments d’images, *picture elements*, c’est-à-dire *pixels*) de l’image, au moyen d’un nombre qui code leur couleur et l’intensité lumineuse. Les retouches d’images se réalisent alors par l’entremise d’opérations matricielles (« filtres »). L’objet « filtre » est apparu quand les étudiants ont étudié le floutage d’images :

Les filtres de flou modifient la valeur du pixel pour qu’elle

³ Les citations sont tirées des rapports rédigés par les équipes (R-En) et de leurs carnets de bord (CB-En). Le code En renvoie à l’équipe numéro n (n est compris entre 1 et 10, les équipes 11 à 20 ayant étudié une autre question). Toutes les équipes ne sont pas citées, soit que les questions dérivées n’aient pas conduit à l’étude des praxéologies qui nous intéressent ici, soit que les productions soient similaires à celles des équipes citées ici.

s'approche de la valeur des pixels voisins (CB-E8)

L'étude des matrices apparaît comme indispensable puisque, comme on le voit en (CB-E8), « le filtre se représente avec une matrice ». Selon l'équipe E1, les filtres produisent des « moyennes de certains pixels » : à chaque coefficient (nombre inscrit dans une entrée de la matrice) on substitue une moyenne pondérée des coefficients voisins. Un filtre est donc, comme l'indique (CB-E9), « une transformation mathématique (produit de convolution) qui permet de modifier la valeur de chaque pixel de la zone d'application, de sorte que sa nouvelle valeur est fonction des pixels voisins, multipliés par des coefficients. On le représente avec une matrice [...] ». Ainsi, les variations brutales (passage du noir au blanc, par exemple) sont atténuées (introduction de nuances de gris comme moyennes pondérées de noir et de blanc).

Notons $A = (a_{i,j})$ la matrice qui modélise l'image et $B = (b_{i,j})$ la matrice de flou, considérant que les indices peuvent prendre des valeurs entre $-p$ et p , où p est un nombre entier positif. Le produit de convolution de A par B est la matrice $C = (c_{i,j})$ définie par la formule suivante :

$$c_{i,j} = \sum_{\substack{-p \leq k \leq p \\ -p \leq l \leq p}} a_{i-k,j-l} b_{k,l}$$

On note : $C = A * B$. En réalité, les filtres n'agissent que sur les pixels les plus proches du pixel en cours de traitement : la matrice B est en fait carrée et de taille modeste (9 ou 25 entrées dans la plupart des logiciels) par rapport à la taille de A qui, en général, est très grande. On considère que les deux matrices sont carrées, de même taille, en complétant les matrices initiales avec des zéros – de sorte que, par exemple, la matrice B est constituée de coefficients nuls sauf pour 9 ou 25 d'entre eux – les coefficients centraux de la matrice. Cette partie centrale de la matrice B du filtre est le *noyau* du filtre.

En notant I une image (ou, de façon équivalente, une matrice qui la représente), on obtient une image floue I' en faisant une opération du type $F * I$, où F est un filtre particulier (par exemple, « gaussien »). Une idée implicite sous-jacente à nombre des pistes explorées par les étudiants est le fait que, d'une certaine façon, la formule $I' = F * I$ doit être équivalente à une autre de la forme $I = N * I'$, où la matrice N serait une « matrice netteté » (R-E6) : c'est à ceci que reviendrait le faire de produire « du flou, mais à l'envers ».

Arrivés à ce point de leur enquête, quelques équipes se sont heurtées à d'autres questions dérivées, liées à la question cruciale suivante :

$Q_{\text{à l'envers conv}}$: « Est-il possible de faire du flou à l'envers ? C'est-à-dire, étant donnée une matrice de flou F , est-il possible de trouver une matrice N qui produise le résultat contraire à celui que produit F ? »

UNE SITUATION PROBLEMATIQUE : EMERGENCE D'UN QUESTIONNEMENT ALGEBRIQUE

L'étude de la question $Q_{\text{à l'envers conv}}$ a entraîné une étude du produit de convolution. Il est à noter que les étudiants concernés n'avaient jamais étudié la notion de produit de convolution (et même qu'au moment où ils ont rencontré la représentation matricielle des photographies, ils n'avaient pas encore abordé l'étude des matrices en cours de mathématiques⁴). L'apparition de l'œuvre « produit de convolution » n'est pas le fruit d'une démarche volontaire ni du concepteur de la question génératrice, ni du professeur qui avait en charge la gestion de l'atelier (qui sont une seule et même personne), ni de la didacticienne qui l'accompagnait dans son travail. Dans un processus d'étude tel que celui dont il est question, le collectif des étudiants est conduit à rencontrer un certain nombre d'œuvres qui viennent enrichir le milieu de l'étude de la question génératrice : ici, c'est la question dérivée « Comment les logiciels manipulent-ils les images ? » qui a conduit – toutes les équipes – à la rencontre du produit de convolution. L'étude se poursuit pour certaines équipes par la réalisation d'un certain nombre de moments didactiques (l'exploration du type de tâches et l'émergence de la technique par exemple, quand les élèves essaient de comprendre la formule à la lumière des exemples simples donnés sur certains sites web dans le cas de noyaux de taille réduite). C'est dans ce contexte qu'apparaissent les différents sous-types de tâches qui constituent la technique pour réaliser le type de tâches « déterminer si une loi est une loi ».

⁴ Notons d'ailleurs que l'atelier d'enquête a été conçu comme une entité autonome, détachée des autres cours – les contraintes institutionnelles n'ont pas permis d'envisager une fonctionnalisation des cours classiques par l'avancée de l'enquête.

Le produit de convolution définit-il une loi interne ?

L'équipe E2 pose la question suivante dans son carnet de bord (CB-E2) : « Comment s'applique cette matrice à la photo ? Nous avons d'abord pensé que pour chaque pixel [de l'image] on multiplie [...] avec la matrice [de convolution, le filtre] Problème : on se retrouve avec une matrice [à la place du pixel initial] !!! Mais si on suit notre logique, le nombre qu'on voudrait trouver devrait caractériser notre pixel, ce serait donc un simple nombre, pas une matrice. »

Cet extrait indique la réalisation du moment de première rencontre avec le type de tâches « calculer un produit de convolution » et décrit également la réalisation du moment exploratoire : les étudiants essaient de calculer le produit avec des techniques encore imparfaites ; le résultat ne correspond pas à ce qu'ils attendaient puisque la matrice obtenue après calcul serait plus grande que la matrice de départ. Ce n'est pas correct puisque les images retouchées seraient alors de taille différente de celle des images initiales : la loi « * » ne serait pas *interne*. Le type de tâches suivant trouve dans cette situation une *raison d'être* importante :

$T_{\text{loi interne}}$: « Vérifier que, ou déterminer si, une certaine application sur un ensemble définit une loi de composition interne »

De fait, les étudiants de l'équipe E2 ont pu s'apercevoir que leur compréhension du produit de convolution (ou, plus précisément, de la technique de calcul de ce produit) n'était pas bonne puisqu'elle conduisait à une loi qui n'est pas interne – et ce défaut avait des effets palpables dans cette situation puisqu'ils se traduisaient sur la taille des images : le logiciel ne modifiait pas la taille des images en appliquant un filtre, par conséquent la loi devait être interne (on voit ici que le logiciel est un élément essentiel du milieu).

Quel noyau laisse les matrices inchangées ?

L'idée « la netteté, c'est le flou à l'envers » conduit à un questionnement sur l'inversibilité des matrices pour la loi « * ». Certains étudiants se trompent en confondant deux types d'opérations sur les matrices : on peut imaginer tout l'intérêt qu'on pourrait tirer d'un jeu sur ces différentes « lois » pour clarifier les fonctions de chaque loi (ses *raisons d'être*). Ainsi, l'équipe E6 (qui, pour des raisons particulières, était parvenue à se convaincre du fait qu'il n'y avait qu'une matrice netteté possible) signale que « le produit de la [*sic*] matrice netteté et de la [*sic*] matrice de flou n'est pas la matrice identité. Par conséquent, la matrice de flou

n'est pas la matrice inverse de la matrice netteté, et vice versa » (R-E6). On peut alors se poser quelques questions très légitimes : de quel produit s'agit-il ? Et de quelle « identité » parle-t-on ? Plusieurs équipes (mais pas l'équipe E6) se sont rendu compte que l'élément neutre pour la loi « * » n'était pas la matrice identité habituelle (qui est l'élément neutre pour la multiplication matricielle classique) mais bien la matrice dont le noyau est représenté en Figure 1.

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figure 1. – Noyau de l'élément neutre pour la loi « * »

L'identification de l'élément neutre n'est pas l'aboutissement d'une interrogation gratuite mais bien de l'intention d'identifier les noyaux qui laissent les images inchangées, pour la raison suivante : l'application successive d'un filtre de flou F et d'un filtre de netteté N devrait laisser inchangée l'image d'origine. C'est-à-dire que pour toute image I , on devrait avoir l'égalité $N*(F*I) = I$. L'idée de ces équipes était par conséquent de calculer le produit $N*F$ pour les matrices N et F qu'ils avaient associées aux processus de netteté et de flou, et étudier si le produit obtenu était le noyau d'un filtre dont l'effet sur une image quelconque I était neutre. Une manière d'augmenter l'efficacité de cette étude était de chercher les matrices E qui vérifient pour toute image I l'identité $E*I = I$. Il suffirait ensuite de vérifier que $N*F = E$ pour l'une des matrices E ainsi trouvées. Par conséquent, la situation étudiée comporte d'importantes *raisons d'être* pour la réalisation du type de tâches suivant :

T_{neutre} : « Chercher l'élément neutre, ou vérifier qu'un élément est l'élément neutre, d'une loi de composition interne »

Comment faire du flou « à l'envers » ?

Nous avons vu que, selon l'équipe E6, « la matrice de flou n'est pas la matrice inverse de la matrice netteté, et vice versa » ; pour autant, il n'y a pas un seul filtre de flou, ni une seule matrice netteté, on peut donc imaginer que l'équipe E6 a calculé le produit $N*F$ pour deux matrices N et F particulières, non inverses l'une de l'autre. On parvient ainsi à la question dérivée suivante :

étant donnée une matrice F , existe-t-il une matrice N telle que $N * F = E$? Ce qui revient à réaliser le type de tâches suivant :

$T_{inverse}$: « Déterminer l'élément inverse, ou vérifier qu'un élément est l'élément inverse, d'un élément donné d'un ensemble donné muni d'une loi interne »

Ce type de tâches permet de formaliser plus précisément la question $Q_{\text{à l'envers conv}}$ et aussi de lui donner une réponse positive pour autant que l'on parvient bien à trouver l'élément inverse d'une matrice de flou donnée. Nous devons insister ici sur le fait qu'aucune équipe n'est parvenue à trouver l'inverse de l'une des matrices de flou qu'elles ont étudiées (mais peu d'équipes procédèrent à une recherche systématique) ; certaines équipes ont avancé des arguments négatifs *a priori* : « flouter, c'est faire une moyenne ; déflouter, c'est essayer de revenir en arrière, mais on a déjà perdu des informations dans le processus de floutage. Par exemple, si on floute [un pixel blanc et un noir], on obtient deux pixels gris et il sera impossible de revenir à l'état antérieur puisqu'il y a une infinité de combinaisons possibles de noir et de blanc pour faire du gris... » (R-E6). D'autres ont proposé une métaphore culinaire : « ce serait comme essayer d'obtenir les œufs, la farine et le sucre à partir d'un gâteau déjà cuit » (R-E1).

VERS UNE SITUATION DU MONDE

La logique interne des enquêtes menées dans le cadre de l'atelier fait que les équipes n'ont pas mené une étude complète des types de tâches $T_{\text{loi interne}}$, T_{neutre} , et T_{inverse} . En outre, on peut imaginer d'autres parcours de réflexion pour l'élaboration d'une réponse à la question génératrice $Q_{\text{netteté}}$. Pourtant, une lecture de type *primordial* du corpus constitué des rapports et des carnets de bord a permis d'identifier certaines praxéologies en lien avec le programme de mathématiques des classes préparatoires scientifiques (praxéologies relatives à l'algèbre abstraite, notamment). Un deuxième mouvement de lecture, *interventionniste*, nous conduit à l'exploration systématique des situations où ces praxéologies apparaissent comme des outils utiles voire indispensables à la réalisation d'un projet, quel qu'il soit (ici, par exemple, répondre à la question dérivée $Q_{\text{à l'envers conv}}$). Dialectiquement, ce travail permet d'affiner l'organisation mathématique que l'on souhaite construire. Ainsi un type de tâches paraît central : T_{inverse} est en effet au cœur de la réponse à la question $Q_{\text{netteté}}$ (rappelons que plusieurs équipes ont vite orienté

leur enquête autour du projet de « faire du flou, mais à l'envers »), question que l'on considérera ici, sans plus enquêter sur ce point, comme archétypique (que l'on pense à toutes les questions de type « problème inverse »). Une technique possible pour réaliser T_{inverse} consiste à poser l'équation $x*y = e$ (où x est l'élément dont on cherche l'inverse pour la loi $*$ et e est l'élément neutre pour cette loi), d'inconnue y , et à résoudre cette équation. Néanmoins, la situation que nous allons présenter dans cette section (et quelques éléments déjà présentés dans les sections précédentes) laisse entendre que cette technique est insuffisante. Il faut en effet s'assurer auparavant que la loi $*$ est bien une loi interne, que e est bien le neutre, voire que la loi est bien associative, etc. Ces vérifications vont devenir des étapes clef de la technique de réalisation de T_{inverse} . On notera ici un renversement de perspective par rapport à des organisations mathématiques classiques, où T_{inverse} apparaît comme un type de tâches parmi d'autres pouvant être réalisés en algèbre abstraite. Intégrer les types de tâches $T_{\text{loi interne}}$ et T_{neutre} dans la technique de réalisation de T_{inverse} , loin d'en faire des types de tâches péjorés permet d'en montrer une fonction importante : réaliser ces deux types de tâches est une étape importante dans la réalisation de T_{inverse} , et non un jeu gratuit sur un ensemble d'axiomes. Une conséquence sur l'organisation praxéologique est que les autres types de tâches n'apparaissent que dans la technique de réalisation de T_{inverse} . En particulier, on pourrait concevoir une organisation mathématique qui mettrait en avant (au niveau technologique) le fait que la notion de groupe répond à la question de la définition d'une opération de passage à l'inverse pour une loi donnée dans un ensemble donné. La définition axiomatique classique est alors une *explicitation* de la notion vague d'« opération de passage à l'inverse », et elle fournit par ailleurs un ingrédient technologique (la notion de « loi interne ») qui permet de construire une technique simple pour vérifier le caractère interne du passage à l'inverse. Dans l'organisation de l'étude, cela signifie qu'on n'étudiera les types de tâches $T_{\text{loi interne}}$ et T_{neutre} que pour autant qu'ils permettent de construire une technique de réalisation de T_{inverse} .

Une fois l'organisation mathématique construite sur ces nouvelles bases, le professeur ou le didacticien doivent s'engager dans la conception d'une AER à partir de situations telles que celles qu'ils ont rencontrées dans l'exploration d'un corpus. Il se peut que les situations identifiées dans la phase de lecture interventionniste soient trop dépendantes du contexte de l'enquête menée dans le cadre de l'atelier, et la compréhension de ces situations implique

que l'on fournisse aux élèves plus d'information qu'on ne peut raisonnablement le faire dans le cadre d'une AER menée en classe. Il se peut également que, bien que les praxéologies choisies soient utiles pour la réalisation d'un projet inscrit dans l'une de ces situations, ce projet puisse être réalisé au moyen d'autres praxéologies de façon au moins aussi efficace. De toute façon, il paraît indispensable de compléter le travail d'exploration du corpus d'enquête (carnets de bord et rapports) par un travail d'élaboration de la situation du monde qui servira de point de départ à l'AER. Cette nouvelle étape dans le travail du professeur ou du didacticien peut consister en une reprise par d'autres moyens de l'enquête menée à propos des questions $Q_{\text{netteté}}$ et $Q_{\text{à l'envers conv.}}$. Dans le cas considéré ici, une telle enquête nous a permis d'identifier une situation problématique qui pourrait être utilisée comme situation du monde dans une AER.

Un paradoxe

En reprenant l'enquête au niveau où l'équipe E6 l'avait laissée, on peut essayer de trouver le noyau inverse du noyau F représenté en Figure 2.

$$F = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Figure 2. – Noyau du flou selon l'équipe E6

La recherche d'un noyau N , de même taille, tel que $N * F = E$ (où E est présenté en Figure 1) conduit au résultat présenté en Figure 3.

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Figure 3. – Noyau « inverse » du noyau F

Pourtant, si on utilise le logiciel GIMP (voir le site <https://www.gimp.org/fr/> pour une présentation de ce logiciel), qui

permet à l'utilisateur d'entrer lui-même les coefficients des noyaux des filtres qu'il désire, il s'avère que retoucher une image I (Figure 4) avec le filtre de noyau F (Figure 5), puis avec le filtre de noyau N (Figure 6), loin de ramener à l'image initiale I , produit une image de moindre qualité que I (et même moindre que celle de l'image floutée $F*I$). Comment expliquer ce paradoxe ?

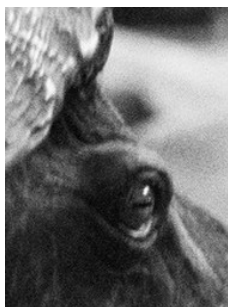


Figure 4. – Une image non retouchée

On peut imaginer un scénario d'AER où le professeur commencerait par expliquer qu'il a cherché à améliorer la netteté d'une de ses photographies au moyen du logiciel GIMP et que, pour cela, il s'est plongé dans une enquête personnelle. Le professeur présente rapidement le logiciel GIMP et la notion de filtre, il explique que selon lui les matrices N et F , pour des raisons qu'il ne détaille pas, devraient produire des effets opposés sur une image, ce qui permettrait de disposer d'un outil pour retoucher les images floues.

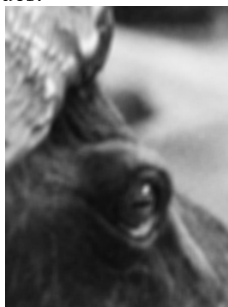


Figure 5. – Image floutée avec F

Néanmoins, quand le professeur applique successivement à une image les filtres associés à ces deux noyaux, les étudiants observent que l'image finale est pire que l'image initiale. La question génératrice de l'AER pourrait être : « Pouvez-vous

m'aider à déflouter l'image (Figure 5) que j'ai floutée ? ». La tâche ✓ que rencontrent les étudiants est alors la suivante : aider le professeur à déflouter l'image qu'il a floutée. La réalisation de cette tâche va les conduire à réaliser la tâche t^* : trouver une matrice de convolution dont le produit par la matrice F donne une matrice dont l'effet par convolution sur une image donnée est neutre. Enfin, cette tâche conduit à la rencontre et l'exploration du type de tâches enjeu de l'étude, T_{inverse} .



Figure 6. – Image floutée « défloutée » avec N

Éléments d'un scénario *a priori*

Le paradoxe que nous venons de présenter se fonde sur une erreur sur la taille des noyaux : vus comme éléments d'un espace de matrices, on peut imaginer spontanément que tous les noyaux utilisés seront de la même taille. Cette idée est renforcée par le fait que le logiciel GIMP accepte seulement des noyaux de taille 5 (voir Figure 7).

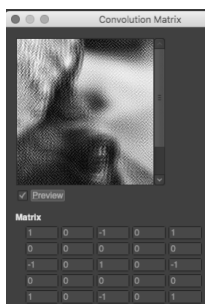


Figure 7. – Saisie d'un noyau sur GIMP

L'égalité $N * F = E$ apparaît comme correcte si on imagine que le résultat du produit doit être un noyau de taille 5 : en calculant les valeurs des seuls coefficients de $N * F$ situés dans la partie centrale de taille 5 de la matrice, on obtient bien un noyau semblable à celui donné en Figure 1. En réalité, l'espace des

noyaux de taille 5 n'est pas stable par convolution : en général un produit de convolution aboutit à un noyau de taille supérieure à celles des deux éléments dont on a calculé le produit. Ainsi, dans le cas des noyaux N et F , le noyau du produit est de taille 7.

De façon plus formelle, notons K_{2p+1} l'ensemble des matrices (infinies) de noyau de taille $2p+1$ (par exemple, pour un noyau de taille 5, p prend la valeur 2) :

$$K_{2p+1} = \{(a_{i,j}) \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}} / \forall (i,j) \in \mathbf{Z}^2, \max(|i|, |j|) > p \Rightarrow a_{i,j} = 0\}$$

Notons K la réunion des K_{2p+1} . La loi $*$: $K_{2p+1} \times K_{2p+1} \rightarrow K_{2p+1}$ est alors mal définie, tandis que la loi $*$: $K_{2p+1} \times K_{2p+1} \rightarrow K_{2p+3}$ est bien définie, mais n'est pas interne. Enfin, la loi $*$: $K \times K \rightarrow K$ est bien définie et interne. Le paradoxe vient du fait que le calcul de $N * F$ a été mené en supposant que le résultat serait dans K_5 , comme N et F : on n'a pas cherché à calculer les valeurs des $a_{i,j}$ pour des indices égaux à 3 ou -3. De la sorte, on suppose implicitement que la loi est bien définie et interne sur K_5 .

On peut imaginer qu'avant de parvenir à une telle conclusion, les étudiants devront analyser les raisons pour lesquelles le professeur dit qu'il est convaincu que les noyaux N et F ont des effets opposés : l'étude de la tâche ✓ conduit ainsi à l'exploration du type de tâches T_{inverse} . Ce qui suit donne une idée du processus possible d'émergence de la technique associée à ce type de tâches. Nous y mentionnons les types de tâches T_{neutre} , $T_{\text{loi associative}}$ (voir *infra*), $T_{\text{loi interne}}$ dont la réalisation constitue la trame de la technique en cours d'élaboration.

Les étudiants calculeront probablement la nouvelle valeur (après convolution par N) de chaque coefficient de F (ce qui suppose implicitement que le produit soit de même taille que F). Pour vérifier que le résultat E ne produit pas d'effet sur une image, ils devront réaliser le type de tâches T_{neutre} (de deux façons : par le calcul, ou en utilisant le logiciel GIMP). La réponse positive à cette question donne toute sa force au paradoxe.

À ce stade, le professeur peut résumer la situation : « Nous avons vu que la matrice E ne produit pas d'effets sur les images et que le produit $N * F$ est égal à E . Pourtant, quand on applique successivement les filtres F et N à une image, on ne revient pas à l'image de départ... Pourquoi cela ? » Cette question cruciale peut conduire à la réalisation du type de tâches suivant :

$T_{\text{loi associative}}$: « Vérifier qu'une loi est associative »

En effet, le paradoxe, à ce niveau de l'étude, peut se formaliser ainsi : « $N * F = E$, et $E * I = I$, mais pourtant $N * (F * I) \neq I$ ». Nous voyons ici l'importance d'une formalisation mathématique, qui seule permet de voir clairement que le paradoxe repose aussi sur une hypothèse implicite d'associativité, puisqu'on y suppose que $N * (F * I) = (N * F) * I$. On peut poursuivre l'étude par la mise en place d'une dialectique des médias et des milieux (Chevallard, 2015 ; Kim, 2015) : le calcul (incorrect, mais on l'ignore encore) qui a conduit à l'égalité $N * F = E$ (qui est le produit d'un *média*, c'est-à-dire d'un « système qui émet des messages [...] sans qu'on puisse écarter l'hypothèse qu'il cherche à influencer *intentionnellement* sur les récepteurs de ses messages » : l'auteur du calcul cherche à se convaincre de la véracité de cette égalité) et l'expérimentation sur une image concrète sur le logiciel GIMP (qui, sans intention quand au résultat du calcul, œuvre comme un *milieu*, un « morceau de nature ») conduisent à la conclusion que la loi « * » n'est pas associative. L'ouverture du milieu par inclusion d'un calcul à la main, ou au moyen d'un logiciel de calcul formel, doit pourtant conduire à la conclusion inverse : « * » est bien associative... Ce qui va enrichir le milieu de l'étude d'une nouvelle information : l'une des propositions suivantes est fautive : « $N * F = E$ », « $E * I = I$ » ou « $N * (F * I) \neq I$ ».

Le professeur peut alors suggérer que le problème vient peut-être de la taille des images : *a priori*, pour appliquer la formule du produit de convolution (introduction d'un nouveau média que constitue cette formule), les matrices N et F devraient être de la même taille que l'image I . « On pourrait compléter avec des zéros et reprendre les calculs ». Dans ce cas, dans le calcul du produit $N * F$ les étudiants vont devoir calculer la valeur modifiée de coefficients nuls qui n'apparaissent pas quand on considérait seulement les noyaux de taille 5. Ils s'apercevront du fait que certains de ces coefficients nuls sont modifiés et que la matrice $N * F$ n'est pas la matrice E mais bien une nouvelle matrice H qui est de taille supérieure à celle de E , mais dont la partie centrale de taille 5 est identique à E . On aboutit ainsi à la conclusion que la loi « * » n'est pas interne ($T_{\text{loi interne}}$) et que l'élément N n'est pas l'inverse de F ($T_{\text{verif inverse}}$: « vérifier si un élément donné est l'inverse pour une loi donnée d'un autre élément »). De même que précédemment, dans une dialectique des médias et des milieux, les étudiants pourront confronter un nouveau média (l'assertion selon laquelle $N * F = H$) avec le milieu (le logiciel GIMP, notamment)

en comparant l'effet de l'application sur une image du filtre de noyau H avec l'application successive de N et F . Comme H est de taille 7 et que GIMP n'accepte que des filtres de taille 5, on peut imaginer que les élèves déplacent l'étude au niveau des filtres de taille 3, enrichissant encore le milieu avec de nouveaux spécimens du type de tâches étudié.

Pour aller au-delà, le professeur, satisfait de l'explication du paradoxe fournie par les étudiants, pourra leur demander s'il serait possible de trouver une matrice N' qui vérifierait l'égalité $N' * F = E$? « Cela permettrait d'améliorer la qualité de certaines images, etc. » L'étude de cette nouvelle question conduirait à un travail de la technique de réalisation du type de tâches T_{inverse} . Mais auparavant, on aura réalisé une nouvelle formalisation de la situation : la discussion précédente aura conduit à la conclusion que le cadre naturel de travail (les noyaux de taille 5) n'est pas le bon puisque la loi « * » n'y est pas interne. Par conséquent, il faut trouver un ensemble de noyaux plus adapté (l'ensemble K des matrices dont les noyaux sont de taille finie mais arbitraire). Ainsi, sur cet ensemble, on pourra vérifier que la loi est interne ($T_{\text{loi interne}}$), associative ($T_{\text{loi associative}}$) et qu'elle possède un élément neutre qu'on déterminera (T_{neutre}). On peut également imaginer que l'étude du problème suivant, trouver dans cet ensemble un inverse pour la matrice N , peut, à son tour, conduire à l'étude d'une nouvelle praxéologie en lien avec le type de tâches $T_{\text{inv ap}}$: « Déterminer un inverse approché d'un élément d'un ensemble pour une loi donnée et à une précision donnée » (ce qui donnerait des *raisons d'être* fortes pour la visite d'œuvres telles que les espaces vectoriels normés, les moindres carrés, etc.).

SYNTHESE ET PROLONGEMENTS

Matrices, produit de convolution, algèbre abstraite

On peut considérer que la mise en œuvre de l'AER présentée dans la section précédente requiert une certaine familiarité avec les matrices. La formalisation au moyen d'espaces de matrices de taille infinie et de noyau de taille finie n'est pas aisée au niveau d'étude considéré et risque de soulever des difficultés importantes. On peut contourner le problème en se ramenant dans un premier temps à des matrices de taille grande par rapport à la taille de leurs noyaux (ce qui est le cas pour les représentations matricielles d'images), même si les problèmes liés à la manipulation d'indices entiers relatifs demeurent.

Un autre point de vue est néanmoins envisageable : on peut considérer cette AER comme la première d'une série d'AER fondées sur l'étude des logiciels de retouche d'image. Cela permettrait de construire un milieu riche pour l'étude de l'algèbre abstraite ; la représentation matricielle réelle d'une image n'est pas possible à la main du fait de la taille des matrices, on est donc contraint à l'usage du formalisme abstrait (rappelons que l'étude des matrices est essentiellement limitée aux matrices de taille 2 et 3 en Terminale S). Cela nourrit également le milieu pour l'étude ultérieure des matrices (avec des lois usuelles) et on peut imaginer un prolongement autour de la question « Comment obtenir le symétrique (axial) d'une image ? » ou « Comment faire tourner une image autour d'un point ? ». Ces questions constituent des raisons d'être de l'étude de nouvelles opérations matricielles (produit matriciel usuel), mais aussi du *groupe* des transformations isométriques du plan.

Le type de réponse (partielle) que nous avons proposée ici au problème de l'élaboration d'un enseignement fonctionnel de l'algèbre abstraite permet, pensons-nous, de mettre en évidence qu'il existe des *raisons d'être* à l'étude de certaines structures algébriques qui ne se réduisent pas à des besoins de formalisation, d'unification, de généralisation ou de simplification (FUGS, voir Robert, 1998, et la discussion en introduction de cet article).

Raisons d'être, raisons d'être didactiques, raisons d'être non didactiques

Nous avons donné une représentation de la notion de raison d'être non didactique fondée sur un paramétrage institutionnel (paramètres I , C et K , qui désignent respectivement l'institution et les conditions et contraintes qui y règnent) et positionnel dans l'institution (paramètre V notamment) : le caractère non didactique d'une raison d'être Q d'une praxéologie \wp découle du fait qu'en l'institution où elle se présente, il existe au moins une instance V qui n'a pas d'intention didactique à l'endroit de \wp et qui considère que la disponibilité de \wp est utile ou indispensable à l'étude de Q par une instance U . Néanmoins, il se peut qu'en la même institution, ou en un autre institution, une autre instance V' , tout en ayant une intention didactique forte à l'endroit de \wp , considère tout autant que la disponibilité de \wp est utile ou indispensable à l'étude de Q par une instance U' . Une raison d'être peut donc être simultanément non didactique et didactique : c'est même le cas de toute raison d'être non didactique une fois qu'une instance a pris la décision de la prendre pour question génératrice d'une AER

visant à l'étude de \wp . Il n'est par ailleurs pas question de dire ici qu'une « bonne » raison d'être est une raison d'être *non didactique* : l'intérêt principal de la distinction entre raisons d'être didactiques et non didactiques est d'inviter à la prudence dans la recherche de questions génératrices et à ne pas s'arrêter trop tôt ; les raisons d'être qui peuvent être mises en avant dans des ressources ayant une intention didactique évidente relative à \wp font courir le risque d'avoir trouvé une raison d'être Q_δ *purement didactique*, c'est-à-dire pour laquelle on serait en peine de trouver une instance V sans intention didactique relativement à \wp et qui estime \wp nécessaire pour étudier Q_δ . Les *créations didactiques* (comme le « grand cosinus » étudié par Chevallard, 1991) sont des praxéologies qui n'ont de raisons d'être que *purement didactiques* au sens qui précède. Enfin, l'utilisation, à des fins didactiques, de raisons d'être non didactiques, pourrait peut-être également servir à la production de situations *adidactiques* (Brousseau, 1997).

Ateliers d'enquête et praxéologies pour la profession.

L'étude de l'émergence de praxéologies mathématiques dans le contexte d'enquêtes qui n'étaient pas conçues pour leur étude permet d'en donner des raisons d'être non didactiques, mais aussi d'observer le type de praxéologies *didactiques* spontanément mises en œuvre par des étudiants placés sous certaines conditions et contraintes : autant d'observations qui viennent nourrir le milieu de l'étude du professeur qui souhaite anticiper les difficultés qui ne manqueront pas de se poser dans la gestion d'une AER fondée sur ces raisons d'être. Plus généralement, la conception et la mise en œuvre d'une AER nécessitent un équipement praxéologique professionnel qui n'est encore que rarement partagé dans la profession.

Nombre de dispositifs de formation initiale de professeurs se sont développés dans ce sens (voir par exemple Cirade, 2006). Une proposition récente, celle des parcours d'étude et de recherche pour la formation de professeurs (PER-FP, voir par exemple Bosch et Ruiz-Olarría, 2013 ; Bourgade, Sierra, Ruiz-Olarría et Lécureux, 2015), se fixe pour objectif d'améliorer la diffusion des parcours d'étude et de recherche, en mettant l'accent sur le travail autour des mathématiques à enseigner (notamment la construction de modèles praxéologiques de référence, MPR, voir Gascón, 2014). Si le travail sur les mathématiques à enseigner est indispensable et trop souvent négligé, il doit être complété par un important travail sur l'organisation de l'étude : en particulier, la conception d'AER est un type de tâches important dans la perspective que nous adoptons

ici, celle de la transition d'un paradigme monumentaliste vers un paradigme de questionnement du monde. Les expériences (déjà nombreuses et anciennes, voir Cirade, 2006) de formation à la conception et mise en œuvre d'AER se heurtent à un certain nombre de difficultés importantes : difficultés liées à la gestion de l'étude, mais aussi à la conception de situations du monde.

Le manque de praxéologies pour la gestion de l'étude, et notamment pour la réalisation des moments exploratoire et technologico-théorique (voir Girard, 2017), est une source importante de difficultés pour la profession. L'étude de corpus d'enquêtes en formation initiale et continue des enseignants devrait permettre de travailler ces techniques dans la mesure où l'on y observe des processus d'étude relativement peu contraints par les attentes didactiques des aides à l'étude – ce qui facilite l'identification de techniques de relance de l'étude alors même que ces techniques sont mises en œuvre par les étudiants enquêteurs eux-mêmes.

Il est par ailleurs difficile, pour la profession, d'identifier des situations du monde (y compris du monde mathématique) où les savoirs enseignés puissent apparaître fonctionnalisés par la nécessité de l'étude de ces situations (voir, sur cette question, le travail important de Kim, 2015). Bien que les deux aspects soient reliés, il semble délicat de ne pas associer au travail sur les mathématiques à enseigner (la constitution de MPR par exemple) une réflexion plus générale sur les usages sociaux (en un sens très large, incluant les usages mathématiques) des praxéologies mathématiques à enseigner. La technique présentée dans ce travail se veut une contribution à cette réflexion. Par ailleurs, il convient de souligner que l'étude de corpus d'enquête, en donnant à voir des usages fonctionnels de savoirs mathématiques parfois perçus comme détachés les uns des autres, permet de remettre au travail les modèles praxéologiques traditionnels et de faire apparaître des liens entre organisations de savoir qui pourront être au cœur de la construction de modèles praxéologiques de référence (ainsi du lien suggéré plus haut entre théorie des groupes et méthodes des moindres carrés pour la recherche d'inverses approchés).

Finalement, on peut imaginer que le travail d'étude de corpus, qui est un véritable travail d'enquête pour le professeur, permette l'appropriation progressive par les professeurs de praxéologies d'étude nécessaires pour faciliter la transition vers un paradigme didactique renouvelé, centré sur le questionnement du monde. Dans ce sens, on pourrait imaginer que les rapports et carnets de bord produits dans le cadre d'ateliers d'enquêtes puissent devenir

des sources essentielles pour l'enrichissement du milieu, dans le cadre de dispositifs de formation de professeurs comme les PER-FP.

BIBLIOGRAPHIE

- ARTAUD, M. (2011). Les moments de l'étude : un point d'arrêt de la diffusion ? Dans M. Bosch et al. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 141-162). Barcelone : CRM
- BARQUERO, B., BOSCH, M., & GASCON, J. (2011). Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 29(3), 339-352. Récupéré de <http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/247884/353579>
- BOSCH, M. (2011). L'écologie des parcours d'étude et de recherche au secondaire. Dans G. Gueudet, G. Aldon, J. Douaire, & J. Trgalova (Eds.), *Apprendre, enseigner, se former en mathématiques : quels effets des ressources ? Actes des journées mathématiques de l'INRP* (pp. 19-34). Lyon : INRP.
- BOSCH, M., & RUIZ-OLARRIA, A. (2013). Un parcours d'étude et de recherche en formation initiale des professeurs du secondaire : le cas des « réductions progressives ». Dans A. Bronner, C. Bulf, C. Castela, J.-P. Georget, M. Larguier, B. Pedemonte, A. Pressiat, & É. Roditi (Eds.), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage* (pp. 415-419). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- BOURGADE, J.-P. (2016). Difficulties of the profession and dissemination as catalysers for the construction of professional praxeologies. In E. Nardi, C. Winsløw & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the First Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2016, 31 March-2 April 2016)* (pp. 350-359). Montpellier, France: University of Montpellier and INDRUM. Récupéré de <https://hal.archives-ouvertes.fr/INDRUM2016>
- BOURGADE, J.-P., BERNAD, K. & MATHERON, Y. (à paraître) The need for new teaching praxeologies in the paradigm of questioning the world. Dans M. Bosch, Y. Chevallard, F. Javier & J. Monaghan (dir.), *ETC book on the Anthropological Theory of the Didactic*. ERME.
- BOURGADE, J.-P., SIERRA, T. Á., RUIZ-OLARRIA, A., & LECUREUX, M.-H. (2015). Un parcours d'étude et de recherche pour la formation des professeurs : sur le passage de l'arithmétique à l'algèbre. Dans D. Butlen, I. Bloch, M. Bosch, C. Chambris, G. Cirade, S. Clivaz, S. Gobert, C.

Hache, M. Hersant, & C. Mangiante-Orsola (Eds.), *Rôles et places de la didactique et des didacticiens des mathématiques dans la société et dans le système éducatif* (pp. 287-314). Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU, G. (1997). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage : Grenoble.

BROWN, A., DEVRIES, D. J., DUBINSKY, E., & THOMAS, K. (1997). Learning binary operations, groups, and subgroups. *The Journal of Mathematical Behavior*, 16(3), 187-239.

CHEVALLARD, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La pensée sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1997). Les savoirs enseignés et leurs formes scolaires de transmission : un point de vue didactique. *Skhólé*, 7, 45 - 64.

CHEVALLARD, Y. (2007). Passé et présent de la TAD. Dans L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 705-746). Jaén : Publicaciones de la Universidad de Jaén. Récupéré du site de

l'auteur :
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Passe_et_present_de_la_TAD-2.pdf

CHEVALLARD, Y. (2009). *Remarques sur la notion d'infrastructure didactique et sur le rôle des PER*. Conférence prononcée aux Journées Ampère tenues à l'INRP, Lyon. Récupéré du site de l'auteur :
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=155&var_recherche=infrastructure+didactique

CHEVALLARD, Y. (2011). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. Dans C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck, & F. Wozniak (Eds.), *Actes de la XV^e école d'été de didactique des mathématiques. En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 81-108). Grenoble : La pensée sauvage. Récupéré du site de l'auteur :
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Cours_de_YC_a_l'EE_2009.pdf

CHEVALLARD, Y. (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: alegato a favor de un contraparádigma emergente. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(2), 161-182. Récupéré de :
<http://www.hipatiapress.info/hpjournals/index.php/redimat/article/view/631/pdf>

CHEVALLARD, Y. (2015). Pour une approche anthropologique du rapport au savoir. *Dialogue*, 155, supplément en ligne. Récupéré de :
http://www.gfen.asso.fr/images/documents/publications/dialogue/dial155_enligne_anthropo_rap_savoir_chevallard.pdf

CID, E. et BOLEA, P. (2007). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. Dans Bronner, A., Larguier, M., Artaud, M., Bosch, M., Chevallard, Y., Cirade, G., & Ladage, C. (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 575-594).

- Montpellier : IUFM. Récupéré de <http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2012/05/EvaPilar-CITAD-II-2010.pdf>
- CIRADE, G. (2006). *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel* (Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille 1, France). <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00120709>
- DORIER, J.-L. (1997). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- DUBINSKY, E., DAUTERMANN, J., LERON, U., & ZAZKIS, R. (1994). On learning fundamental concepts of group theory. *Educational studies in Mathematics*, 27(3), 267-305.
- DURAND-GUERRIER, V., HAUSBERGER, T., & SPITALAS, C. (2015). Définitions et exemples : prérequis pour l'apprentissage de l'algèbre moderne. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Paris (IREM), 20, 101-148.
- FERRARD, J.-M. (2015). Structures algébriques. Récupéré du site de l'auteur : http://mathprepa.fr/?dl_name=www.mathprepa.fr-cours-mpsi-chap11.pdf
- FONSECA, C., GASCON, J. & OLIVEIRA, C. (2014). Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 17(3), 289-318. Récupéré de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362014000300003
- GASCON, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 14(2), 203-231. Récupéré de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362011000200004
- GASCON, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática*, 5(E), 99-123. Récupéré de <http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Esp-1-5.pdf>
- GIRARD, C. (2017). *Faire étudier les mathématiques en questionnant le monde : infrastructures didactiques pour la réalisation des moments exploratoire et technologique-théorique* (Mémoire de master 2 recherche en didactique des mathématiques, Aix-Marseille Université, Marseille).
- HAUSBERGER, T. (2012). Le challenge de la pensée structuraliste dans l'apprentissage de l'algèbre abstraite: une approche épistémologique. Dans J.-L. Dorier, & S. Coutat (Eds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social. Enjeux et défis pour le 21^e siècle. Actes du colloque EMF 2012* (pp. 425-434). Récupéré de <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00797628>
- HAUSBERGER, T. (2016). Comment développer des praxéologies structuralistes en Algèbre Abstraite ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 36(1), 97-142.

- KIM, S. (2015). *Les besoins mathématiques des non-mathématiciens : quel destin institutionnel et social ? Études d'écologie et d'économie didactiques des connaissances mathématiques* (Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille, France). <http://www.atd-tad.org/wp-content/uploads/2016/02/SKim-These.pdf>
- LAJOIE, C. (2000). *Difficultés liées aux premiers apprentissages en théorie des groupes* (Thèse de Doctorat, Faculté des études supérieures de l'Université Laval, Québec).
- LAJOIE, C., & MURA, R. (2004). Difficultés liées à l'apprentissage des concepts de sous-groupe normal et de groupe quotient. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 24(1), 45-80.
- ROBERT A. (1992), Projets longs et ingénierie pour l'enseignement universitaire : questions de problématique et de méthodologie. Un exemple : un enseignement annuel de licence en formation continue, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(2/3), 181-220.
- ROBERT, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques*, 18(2), 139-189.
- RUIZ, N., BOSCH, M., & GASCON, J. (2010). La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria. Dans M. Moreno, J. Carrillo, et A. Estrada (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 545-556). Lleida : Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Récupéré de http://funes.uniandes.edu.co/1716/1/365_2010Laalgebrizacion_SEIEM13.pdf